УДК 550.831

А.В. Чорний, Ю.І. Дубовенко

УТОЧНЕННЯ ДЕЯКИХ СПОСОБІВ НАБЛИЖЕНОГО ВИЗНАЧЕННЯ КОНТАКТНОЇ МЕЖІ

(Представлено академіком НАН України В.І. Старостенком)

The Andreev`s approach to solving the linear integral equations approximating the nonlinear equation for contact interfaces on the Numerov`s set is considered. The Numerov, Hughes and Strakhov formulas are partial cases of the foregoing approach and need to be improved. Some stable methods for their specification treated as the Malkin, Senko and Malovychko corrections are offered.

Теорії розв'язання плоских контактних задач з інтегральними операторами Пуассона присвячено багато праць [1-7]. Дане повідомлення продовжує вивчення схем, в яких отримано набір лінійних інтегральних рівнянь, якими на класі $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ меж $\zeta(x)$ поділу однорідних середовищ з високою точністю замінюється нелінійне інтегральне рівняння оберненої задачі потенціалу для контактної поверхні й побудовано збіжні ітераційні процеси для їх розв'язання [8,9].

1. Позначимо через $u(x)$ вертикальну складову напруженості поля $U_{x_2}(x)$ й визначимо розв'язок $\zeta(x,h)\in Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ як аналітичне продовження напруженості поля $u(x)$ в бік тяжіючих мас на величину, яка дорівнює *середній глибині* $h=\zeta(x)$ шуканого контакту:

$$\zeta(x)=u(x)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta^2(\xi)}{(\xi-x)^2+\zeta^2(x)}d\xi\approx\zeta(x;h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\left[u(\xi)-h\right]d\xi\,. \qquad (1)$$

Наближення $\zeta(x)$ уточнено на основі тлумачення рівняння (1) за допомогою інтеграла Пуассона: виходячи з цього, маємо $u_i(x,h)=\zeta(x)$, $u_e(x,h)=-\zeta(x)$ та вираз

$$\zeta(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\left[u(\xi,h)-u(x,h)\right]d\xi \qquad (2)$$

Наближення $\zeta(x,h)$, що апроксимує розв'язок $\zeta(x,h)\in Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ з точністю до квадрата величини $h^{-1}\omega(\xi)$, де $\omega(\xi)=h^{+}-h^{-}$, визначаємо через значення каліброваного поля на рівнях $y=0$ й $y=-h$ [1,2]: на першому рівні їх задають, а на іншому обчислюють як аналітично продовжену в бік тяжіючих мас гармонічну функцію за заданими граничним значеннями.

Зауваження. За виразом (2) не можна строго визначити функцію $u(x,h)$ через аналітичне продовження значення $u(x)$ на рівень $y=h>0$, оскільки відповідна йому пряма $y=h$ розтинає тяжіючі маси надвоє, одна з частин якої при $\zeta(x)\le h$ виявляється *нижче* рівня $y=h$. Отже, функція $u(x,y)$ при $y<h$ – негармонічна. Якщо за допомогою інтеграла Пуассона

$$u(x,0)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}u(\xi,h)d\xi \qquad (3)$$

формально продовжити "контакт" $u(x)$ до рівня $y=h$, то отримане значення $u(x)$ тлумачимо як граничне значення поля, мас сконденсованих на рівні $y=h$.

Щоб знайти значення $\zeta(x,h)$, визначмо продовжену на $y=h$ гармонічну функцію $\zeta(x,y)$ як границю послідовності $\{\zeta_n(x,h)\}$ функцій при розв'язанні рівняння (3), генерованих запропонованим процесом [9] послідовних наближень Лаврентьєва-Андреєва

$$\zeta_{n+1}(x,h)=\zeta_n(x,h)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta_n(\xi,x)d\xi+v(x),\ \zeta_0(x,h)\equiv v(x)=u(x)-h,\ n=0,\infty \qquad (4)$$

Правдивість такого твердження наведемо нижче.

Теорема Андреєва. *Якщо розв'язок нелінійного інтегрального рівняння для контакта* $\zeta(x)\in Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, *то його лінеаризоване наближення обчислюється з виразу*

$$\zeta^{(n)}(x,h)=\zeta(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}C_{n+2}^{k+1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kh}{(kh)^2+(\xi-x)^2}\eta(\xi,x)d\xi\,, \qquad (5)$$

й від істинного ухиляється не більш, ніж на $h^{-2}\omega^2(\xi)$ *при* $h\to\infty$.

Доведення грунтується на індукції за індексом $k=0,n$, враховуючи інтеграл Лапласа, біномні коефіцієнти, рівняння $\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_n(x,h)=\zeta(x,h)$ та перетворення

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(t-x)^2}\frac{kh}{(kh)^2+(\xi-t)^2}dt=\frac{(k+1)h}{[(k+1)h]^2+(\xi-x)^2},\ h>0.$$

2. З формули (5) отримуємо як окремі випадки при $n=0,1,2$ деякі відомі формули, а саме: при $n=0$ – наближення Б.В. Нумерова [3], при $n=1$ – наближення Х`юза [4] і при $n=2$ – наближення Страхова [5]:

$$\zeta^{(0)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\Delta u(\xi)d\xi, \tag{6}$$

$$\zeta^{(1)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{3h}{h^2+(\xi-x)^2}-\frac{2h}{(2h)^2+(\xi-x)^2}\right\}\Delta u(\xi)d\xi, \tag{7}$$

$$\zeta^{(2)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{6\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}-4\frac{2h}{(2h)^2+(\xi-x)^2}+\frac{3h}{(3h)^2+(\xi-x)^2}\right\}\Delta u(\xi)d\xi, \tag{8}$$

де $\Delta u(\xi)=u(\xi,0)-u(x,0)$. Формули (7), (8) як і (5) при $n\geq 3$ непридатні для обчислень, на відміну від виразу (6); вони спричинюють наростання похибок з номером ітерації при обчисленні в околі точки $\xi=x$; щоб уникнути цього, ядра інтегралів підсумовують з різними знаками й зростаючими біномними коефіцієнтами. Подібне не властиво для (6); перетворення формул з індексами $n>0$ (підсумування елементарних дробів в ядрах перетворень) за схемою (5) при $n=1,2,3$ визначає додатні ядра перетворень, а при $n=4$ вже ні, тому для практичних обчислень наближень контакту $\zeta^{(n)}(x,h)$ варто взяти за нульове наближення вираз (6) і обмежитись однією з наступних формул:

$$\zeta^{(1)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[10h^2+(\xi-x)^2\right]h}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]}\cdot\Delta u(\xi)d\xi,$$

$$\zeta^{(2)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[156h^4+13h^2(\xi-x)^2+(\xi-x)^4\right]h}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(3h)^2+(\xi-x)^2\right]}\Delta u(\xi)d\xi, \tag{9}$$

$$\zeta^{(3)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[3696h^6+124h^4(\xi-x)^2+\right.}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]}\times\frac{\left.+29h^2(\xi-x)^4+(\xi-x)^6\right]h}{\left[(3h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(4h)^2+(\xi-x)^2\right]}\Delta u(\xi)d\xi.$$

3. Значного уточнення зазначених наближень можна досягти за допомогою поправок, суть яких окреслено в двох теоремах.

Теорема Малкіна. *Корекція кожного з лінеаризованих наближень* (5) $\zeta^{(n)}(x,h)$ *на величину*

$$\Delta\zeta(x,h)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h^2-(\xi-x)^2}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]^2}\left[u(\xi,h)-u(x,h)\right]d\xi, \tag{10}$$

підвищує точність наближень $\zeta_1^{(n)}(x,h)=\zeta^{(n)}(x,h)+\Delta\zeta(x,h)$ *до* $h^{-3}\omega^3(\xi)$*; в практиці обчислень достатньо подати поправку* $\Delta\zeta(x,h)$ *у вигляді* $\Delta\tilde{\zeta}(x,h)=u(\xi_0)\frac{\partial u(x,-h)}{\partial y}$*, де* $u(\xi_0)$ *- деяке «середнє» значення поля на поверхні спостережень.*

Доведення випливає з наслідку 2 теореми Нумерова [8] та відновлення $u(x,h)$ з ітерацій (5) для перших 4-х наближень $\zeta^{(n)}(x,h)$ для фіксованого $\zeta(x)=h$. Зображення поправки у вигляді

$$\Delta\tilde{\zeta}(x,h)=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)f(\xi)d\xi+u(x)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h^2+(\xi-x)^2}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]}u(\xi)d\xi\right\}$$

на ділянках *монотонного зростання (спадання)* функції $u(x)$, $\alpha_k\leq x\leq\alpha_{k+1}, k=1,2,...,n$,

$\alpha_1=-\infty,\alpha_{n+1}=\infty$, де $f(\xi)=\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi}\frac{\xi-x}{h^2+(\xi-x)^2}$ зберігає знак, за винятком, може, околу точки $\xi=x$, й розклад зображення за теоремою про середнє значення поля за умови, що величини $u(\xi_k)-u(x_0)$ малі, завершує доведення теореми.

Теорема Сенька. *Уточнення кожного з наближень* $\zeta^{(n)}(x,h)$ *поправкою, яка є розв`язком лінійного інтегрального рівняння* 1*-го роду*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta\zeta(\xi)}{\left[\zeta^{(n)}(x,h)\right]^2+(\xi-x)^2}d\xi=v(x),\quad v(x)=u(x)-\zeta^{(k)}(x,h)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{\left[\zeta^{(k)}(x,h)\right]^2+(\xi-x)^2}{\left[\zeta^{(k)}(\xi,h)\right]^2+(\xi-x)^2}d\xi$$

підвищує точність наближень $\zeta_1^{(k)}(x,h)=\sqrt{\left[\zeta^{(k)}(x,h)\right]^2+\Delta\zeta(x)}$, $k=0,1,2,3...$ *до величини* $\Delta\zeta_0^2\left(h^+\right)^{-3}$, $\zeta_0=\max\limits_x\left|\Delta\zeta(x)\right|$.

Доведення грунтується на дійсному для $\zeta^{(n)}(x,h)\in Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ розкладі

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta^2(\xi)}{(\xi-x)^2+\left[\zeta^k(\xi,h)\right]^2}d\xi=\frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\Delta\zeta(\xi)}{\left[\zeta^{(k)}(\xi,h)\right]^2+(\xi-x)^2}\right)^k d\xi,$$

та теоремі Андреєва.

4. Як узагальнення поправки Сенька запропоновано альтернативний спосіб Нумерова-Маловичка, що полягає в обчисленні послідовних наближень $\zeta_{n+1}(x)=\zeta_n(x)+\Delta\zeta_n(x)$, $\Delta\zeta_n(x)=\lim\limits_{m\to\infty}\Delta\zeta_n^{(m)}(x)$з допомогою цього ітераційного процесу: $\zeta_0(x)=\zeta^{(k)}(x,h)$, $k=0,1,2,3...$, $h^-\le h\le h^+$,

$$\Delta\zeta_n^{(m+1)}(x)=u(x)-\zeta_n(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta_n^2(x)}{(\xi-x)^2+\zeta_n^2(\xi)}d\xi-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\Delta\zeta_n^{(m)}(\xi)d\xi+\Delta\zeta_n^{(m)}(x),\quad m=\overline{0,\infty},\quad n=\overline{0,\infty}\qquad(11)$$

Теорема Маловичка. *При* $\zeta(x)\in Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ *послідовні наближення* $\zeta_{n+1}(x,h)=\zeta_n(x,h)+\Delta\zeta_n(x,h)$, $h^-\le h\le h^+$, *генеровані ітераційним процесом* (11)*, збігаються при* $n\to\infty$ *до граничної функції* $\zeta(x)$*, незалежної від параметра h, зі швидкістю геометричної прогресії.*

Доведення грунтується на тому, що процес (11) за індексом *m* є процесом Лаврентьєва-Андреєва та збіжності $\zeta_n(x,h)$ з відповідною мажорантою прогресії.

Кожен спосіб по суті зводиться до розв`язання лінійного інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду з ядром Пуассона, яке є самостійною проблемою.

1. *Андреев Б.А.* Расчеты пространственного распределения потенциальных полей и их использование в разведочной геофизике // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. – 1949. – **13**, №3. – С. 256-267
2. *Страхов В.Н.* Сведение проблемы аналитического продолжения в горизонтальный слой к решению линейных интегральных уравнений первого рода типа свертки с быстро убывающими ядрами // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. – 1963. – №8. – С. 1206–1221.
3. *Нумеров Б.В.* Интерпретация гравитационных наблюдений в случае одной контактной поверхности // ДАН СССР. – 1930. – №21. – С. 569–574.
4. *Hughes D.* The analitic basis of gravity interpretation // Geophys. – 1942. – 7, № 2. – P. 169–178.
5. *Страхов В.Н.* Об интегральных и функциональных уравнениях некоторых обратных задач теории логарифмического потенциала и их значении для интерпретации гравитационных и магнитных аномалий // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1976. – №3. – С. 54–66.
6. *Малкин Н.Р.* О решении обратной магнитометрической задачи для случая одной контактной поверхности при пластообразном залегании масс // Докл. АН СССР. – 1931. – **А**, №9. – С. 231–235
7. *Сенько А.К.* К интерпретации гравитационных наблюдений по методу интегральных уравнений // Бюлл. нефт. геофиз. – Москва–Ленинград: ОНТИ, 1936. – Вып. **3**. – С. 151–152.
8. *Старостенко В.И., Черная Н.Н., Черный А.В.* Условия существования решения обратной задачи теории потенциала для контактной поверхности // Докл. АН УССР. Сер. Б. – 1988. – №6. – С.30-33
9. *Старостенко В.І., Чорна Н.Н., Чорний А.В.* Лінеаризована постановка оберненої задачі потенціалу для контактної поверхні // Доп. АН УРСР. Сер. Б. – 1988. – №7. – С.17–20.

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 29.04.2002

Cherny A.V., Dubovenko Yu..I. **Specification of some methods for contact approximation.**

Черный А.В., Дубовенко Ю.И. **Уточнение некоторых способов приближенного определения контактной границы**.

Рассмотрен подход Андреева для решения линейных интегральных уранений, аппроксимирующих на множестве Нумерова нелинейное уравнение для контактной поверхности. Формулы Нумерова, Хьюза, Страхова – частные случаи этого подхода и нуждаются в уточнении. Предложены устойчивые методы для их уточнения на основе поправок к способам Малкина, Сенько и Маловичко.